

基于加权双剪强度理论的高强井壁结构 理想弹塑性解

杨 龙, 姚直书, 薛维培

(安徽理工大学 土木建筑学院, 安徽 淮南 232001)

摘 要: 为更方便获得高强井壁的极限承载力, 基于加权双剪强度理论, 考虑不同中间主应力效应, 分2种情况分别求解厚壁圆筒的理想弹塑性解: ①厚壁圆筒在外压 p_0 作用下处于全弹性状态, 加上轴压 P 后处于弹塑性状态; ②厚壁圆筒仅在外压 p_0 作用下处于弹塑性状态。得到了基于加权双剪强度理论的厚壁圆筒的弹塑性应力解公式、弹塑性极限承载力公式、塑性区半径表达式, 并给出不同中间主应力的适用条件; 对情况②中的极限承载力公式进行修正, 给出了 C70 高强混凝土井壁极限承载力修正公式, 用修正的极限承载力公式计算的高强井壁极限承载力与试验值相比, 误差在 $\pm 3\%$ 左右。修正的极限承载力公式将对井壁结构的优化设计具有重要指导意义。

关键词: 高强井壁; 加权双剪强度理论; 厚壁圆筒; 弹塑性应力解; 极限承载力

中图分类号: TU265.32 **文献标志码:** A

文章编号: 1001-5485(2019)05-0128-07

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Ideal Elasto-plastic Solution of High-strength Shaft Lining Based on Weighted Double Shear Strength Theory

YANG Long, YAO Zhi-shu, XUE Wei-pei

(School of Civil Engineering and Architecture, Anhui University of Science and Technology,
Huainan 232001, China)

Abstract: An ideal elasto-plastic solution of thick-walled cylinder is presented to acquire the ultimate bearing capacity of high-strength shaft lining based on the weighted double shear unified strength theory in consideration of different intermediate principal stress effects. In one case, under external pressure p_0 , thick-walled cylinder is in full elastic state, but changes to elasto-plastic state when axial compression P is applied; in another case, only under external pressure p_0 , thick-walled cylinder is in elasto-plastic state. Moreover, the formula of elasto-plastic stress solution, the formula of elasto-plastic ultimate bearing capacity, and the expression of the radius of plastic zone are obtained based on the weighted double shear unified strength theory, and the applicable conditions of different intermediate principal stresses are given. The aforementioned formula of ultimate bearing capacity is modified for C70 concrete shaft lining. Compared with the test value, the error of the ultimate bearing capacity calculated by the modified formula is about $\pm 3\%$. In summary, the modified formula of ultimate bearing capacity is of guiding significance for the optimal design of shaft lining structure and model test results.

Key words: high-strength shaft lining; weighted double shear strength theory; thick-walled cylinder; elasto-plastic stress solution; ultimate bearing capacity

收稿日期: 2017-12-25; 修回日期: 2018-05-07

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51674006); 国家重点研发计划资助项目(2016YFC0600902); 安徽省高校学科(专业)拔尖人才学术资助项目(gxbjZD09); 安徽理工大学青年教师科学研究基金项目(QN2017211); 安徽理工大学创新基金资助项目(2017CX2070); 安徽省高等学校自然科学研究重点项目(KJ2018A0098)

作者简介: 杨 龙(1992-), 男, 安徽宿州人, 硕士研究生, 研究方向为地下工程结构。E-mail: 2368297161@qq.com

通信作者: 姚直书(1963-), 男, 安徽舒城人, 教授, 硕士, 博士生导师, 主要研究方向为岩土工程与地下工程结构。E-mail: yao.zs@163.com

1 研究背景

厚壁圆筒结构因受力合理而广泛应用于地下结构工程。井壁与土体共同作用,厚壁圆筒结构不仅受到水平地应力、冻结压力^[1],而且还受到疏水沉降造成的竖向附加力和井壁自重应力^[2],因此立井井壁是在围压和轴压共同作用下工作的。

针对薄壁圆管和厚壁圆筒的弹塑性解,国内外学者进行了大量研究。Heitzer^[3]采用数值计算程序对内压、轴压共同作用下的缺陷圆管的塑性极限承载力进行了倒塌分析,实际上并没有给出真正意义上的极限承载力公式。Stokey 等^[4]基于 Mises 屈服准则,推导出薄壁圆管和厚壁圆筒在内压、弯矩、轴力和扭矩共同作用下的极限承载力,但得出的结果偏保守。郑津洋^[5]基于理想弹塑性材料假设和 Mises 屈服准则,给出仅受内压作用下厚壁圆筒的弹塑性应力表达式和塑性区半径与内压的关系。朱国民等^[6]基于理想弹塑性材料假设和 Von-Mises 屈服准则,给出了在内压和轴向力共同作用下的厚壁圆筒极限承载力公式。余同希^[7]基于 Tresca 屈服准则和 Ludwik 理论并考虑了主应力大小的影响,给出了理想弹塑性材料和强化材料的厚壁圆筒在内压作用下的弹塑性应力解。侯公羽等^[8]基于 Levy-Mises 本构关系及 D-P 屈服准则给出了轴对称圆巷理想弹塑性应力解和塑性区半径表达式,但对主应力大小考虑不够全面。冯剑军等^[9]则基于双剪统一强度理论,系统讨论了不同中间主应力效应,得出厚壁圆筒在内压与轴向力共同作用下的塑性极限载荷表达式,其不足在于仅考虑轴压作用对 σ_z 的影响而忽略内压作用对 σ_z 的影响。李雪梅等^[10]基于三参数强度准则推导了流固耦合作用下立井井壁弹性区和塑性区的应力解析表达式,其不足在于仅考虑水平荷载对井壁结构应力解的影响。

虽然针对厚壁圆筒在围压作用下的弹塑性解较多,但采用的计算模型并不能完全描述立井井壁的受力状态,同时以上塑性分析大都采用 Mises 屈服准则和 Tresca 屈服准则,这 2 种准则主要适用于金属类材料。为此,本文将建立符合井壁结构实际受力的力学模型,采用更加适用于混凝土材料的加权双剪强度理论,充分考虑不同中间主应力效应求解立井井壁极限承载力,以此来优化井壁结构,最大程度发挥材料的潜力,创造更大的经济效益。

2 加权双剪强度理论

双剪统一强度理论不仅能够体现材料的拉压异性和同性特征,考虑不同中间主应力效应,还能够适用于不同的屈服准则^[9],如在岩土工程中,采用轴心抗压强度 σ_c 和主应力形式的双剪统一强度理论来表达屈服准则^[11],即:

$$\frac{\sigma_1}{\alpha} - \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c, \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha(1+b)}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_c, \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}。 \quad (2)$$

式中: $b(0 \leq b \leq 1)$ 为反映中间主应力影响的权系数,当 b 取不同的值时,双剪统一强度理论就成为不同的强度准则; α 为轴心抗拉强度 σ_s 与轴心抗压强度 σ_c 之比。

对于岩土类材料,当权系数取 $b = 1/2$ 时,双剪统一强度理论就成为加权双剪强度理论,即:

$$\frac{\sigma_1}{\alpha} - \frac{1}{3}(\sigma_2 + 2\sigma_3) = \sigma_c, \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}; \quad (3)$$

$$\frac{1}{3\alpha}(2\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_c, \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}。 \quad (4)$$

双剪统一强度理论的优点在于考虑了岩土类材料中间主应力的影响,又可以与很多材料的真三轴试验结果相符合^[12]。

3 弹塑性求解的几点假设

(1) 假设外压和轴压的加载顺序对厚壁圆筒的极限承载力影响不大,文献[6]对这一假设用有限元数值解给予了验证。

(2) 假设材料是均匀的、各向同性。

(3) 假设材料不可压缩,故根据 Levy-Mises 本构关系有

$$\frac{2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_r}。 \quad (5)$$

其中 $\varepsilon_z = 0, d\varepsilon_z = 0$, 则有 $2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta = 0$, 所以有

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta) / 2。 \quad (6)$$

4 外压 p_0 和轴压 P 共同作用下厚壁圆筒弹塑性解

对于内半径为 R_0 、外半径为 R_1 、塑性区半径为

R_c 的厚壁圆筒,同时承受内压 p_1 和外压 p_0 作用时,其弹性应力解可由拉梅(Lame)^[13] 公式式(7)表示。

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{R_1^2 R_0^2 (p_0 - p_1)}{R_0^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0}{R_0^2 - R_1^2}, \\ \sigma_\theta = -\frac{R_1^2 R_0^2 (p_0 - p_1)}{R_0^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0}{R_0^2 - R_1^2}. \end{cases} \quad (7)$$

式中 r 为圆筒半径,其值范围为 $R_0 < r < R_1$ 。

若圆筒内外径比用 $K = R_0/R_1$ 表示,塑性区半径与外径比值 $K_c = R_c/R_1$,则厚壁圆筒仅在外压作用下的弹性应力解可由式(7)和式(6)联立得到,即

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_0}{1 - K^2} \left(\frac{R_0^2}{r^2} - 1 \right), \\ \sigma_\theta = -\frac{p_0}{1 - K^2} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z = -\frac{p_0}{1 - K^2}. \end{cases} \quad (8)$$

由于假设材料不可压缩,可认为轴压不影响由内压所引起的厚壁圆筒环向应力和径向应力分布,故轴压引起的竖向应力表达式为

$$\sigma_z' = -\frac{P}{A}, \quad A = \pi(R_1^2 - R_0^2). \quad (9)$$

那么厚壁圆筒在外压和轴压共同作用下弹性应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_0}{1 - K^2} \left(\frac{R_0^2}{r^2} - 1 \right), \\ \sigma_\theta = -\frac{p_0}{1 - K^2} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z = -\frac{p_0}{1 - K^2} + \sigma_z'. \end{cases} \quad (10)$$

假设拉为正,压为负,由于轴力是压力,所以 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ 之间的关系有 3 种情况: $\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta, \sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$, 介于 $\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$ 与 $\sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$ 之间。

4.1 在 $\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$ 的情况下求圆筒弹塑性应力解及其极限载荷

令 $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_\theta$, 其边界条件为: 当 $r = R_0$ 时, $\sigma_r = 0$; 当 $r = R_1$ 时, $\sigma_r = -p_0$ 。此时 $\sigma_z \leq (\sigma_r + \alpha\sigma_\theta)/(1+\alpha)$ 成立而 $\sigma_z > (\sigma_r + \alpha\sigma_\theta)/(1+\alpha)$ 不成立。将式(10)代入式(3)可得

$$\sigma_z' = \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) \frac{R_0^2}{r^2} + 3 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1 - K^2} - 3\sigma_c. \quad (11)$$

又因为 $\sigma_z \geq \sigma_\theta$, 所以有

$$\sigma_c \leq \left[\left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) K^2 + 1 - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1 - K^2}. \quad (12)$$

将式(11)代入式(10)并联立式(9)得

$$P = A \left\{ 3\sigma_c - \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) \frac{R_0^2}{r^2} + 3 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1 - K^2} \right\}. \quad (13)$$

令 $r = R_0$ 可得弹性极限轴力为

$$P_0 = A \left(3\sigma_c - \frac{5p_0}{1 - K^2} \right). \quad (14)$$

令 $r = R_1$ 可得塑性极限轴力为

$$P_1 = 3\sigma_c - \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) K^2 + 3 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1 - K^2}. \quad (15)$$

令 $r = R_c$ 可得塑性区半径与外压和轴压的关系为

$$R_c = R_0 \sqrt{\frac{3 + 2\alpha}{\alpha \left(3\sigma_c - \frac{P}{A} \right) \frac{1 - K^2}{p_0} + 3 - 3\alpha}}. \quad (16)$$

将式(11)代入式(10)得塑性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_0}{1 - K^2} \left(\frac{R_0^2}{r^2} - 1 \right), \\ \sigma_\theta = -\frac{p_0}{1 - K^2} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z = \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) \frac{R_0^2}{r^2} + 2 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1 - K^2} - 3\sigma_c. \end{cases} \quad (17)$$

利用弹塑性交界面边界条件 $\sigma_{r=R_c}^p = \sigma_{r=R_c}^e = -p_c$, 其中 $\sigma_{r=R_c}^p$ 表示弹性区外半径处径向应力, $\sigma_{r=R_c}^e$ 表示塑性区内半径处径向应力。则弹塑性交界面上压力为

$$p_c = -\sigma_{r=R_c}^p = -\sigma_{r=R_c}^e = \left(1 - \frac{R_0^2}{R_c^2} \right) \frac{p_0}{1 - K^2}. \quad (18)$$

那么当 $R_c \leq r \leq R_1$ 时,圆筒受内压 p_c 和外压 p_0 ,故弹性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1 - K_c^2} + \frac{R_c^2}{1 - K_c^2} \frac{p_0 - p_c}{r^2}, \\ \sigma_\theta = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1 - K_c^2} - \frac{R_c^2}{1 - K_c^2} \left(\frac{p_0 - p_c}{r^2} \right), \\ \sigma_z = \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) \frac{R_0^2}{R_c^2} + 2 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1 - K^2} - 3\sigma_c. \end{cases} \quad (19)$$

4.2 在 $\sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$ 的情况下求圆筒弹塑性应力解及其极限载荷

令 $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 = \sigma_\theta, \sigma_3 = \sigma_z$, 其边界条件为:

当 $r = R_0$ 时, $\sigma_r = 0$; 当 $r = R_1$ 时, $\sigma_r = -p_0$ 。

4.2.1 $\sigma_\theta \leq (\sigma_r + \alpha\sigma_z)/(1+\alpha)$ 情况下

按照 4.1 节将式(10)代入式(3)可得:

$$\sigma_z' = \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} - \frac{3}{2} \sigma_c; \quad (20)$$

$$\sigma_c \geq \frac{2p_0}{1-K^2}; \quad (21)$$

$$P = A \left\{ \frac{3}{2} \sigma_c - \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} \right\}. \quad (22)$$

令 $r = R_0$ 可得弹性极限轴力为

$$P_0 = A \left(\frac{3}{2} \sigma_c - \frac{2p_0}{1-K^2} \right). \quad (23)$$

令 $r = R_1$ 可得塑性极限轴力为

$$P_1 = A \left\{ \frac{3}{2} \sigma_c - \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) K^2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} \right\}. \quad (24)$$

令 $r = R_c$ 可得塑性区半径与外压和轴压的关系为

$$R_c = R_0 \sqrt{\frac{3+\alpha}{\alpha \left(3\sigma_c - \frac{2P}{A} \right) \frac{1-K^2}{p_0} + 3 - 3\alpha}}. \quad (25)$$

将式(20)代入式(10)可得塑性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_0}{1-K^2} \left(\frac{R_0^2}{r^2} - 1 \right), \\ \sigma_\theta = -\frac{p_0}{1-K^2} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z = \frac{3}{2} \sigma_c - \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2}. \end{cases} \quad (26)$$

同理可得弹性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2} + \frac{R_c^2}{1-K_c^2} \left(\frac{p_0 - p_c}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2} - \frac{R_c^2}{1-K_c^2} \left(\frac{p_0 - p_c}{r^2} \right), \\ \sigma_z = \frac{3}{2} \sigma_c - \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{R_c^2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2}. \end{cases} \quad (27)$$

4.2.2 $\sigma_\theta > (\sigma_r + \alpha \sigma_z) / (1 + \alpha)$ 情况下

将式(10)代入式(4)可得

$$\sigma_z' = \left(\frac{1}{3\alpha} \frac{R_0^2}{r^2} + 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2} - \sigma_c; \quad (28)$$

$$\sigma_c \geq \left(2 - \frac{2}{3\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2}; \quad (29)$$

$$P = A \left[\sigma_c - \left(\frac{1}{3\alpha} \frac{R_0^2}{r^2} + 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2} \right]. \quad (30)$$

令 $r = R_0$ 可得弹性极限轴力为

$$P_0 = A \left[\sigma_c - \left(1 - \frac{2}{3\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2} \right]. \quad (31)$$

令 $r = R_1$ 可得塑性极限轴力为

$$P_1 = A \left[\sigma_c - \left(\frac{1}{3\alpha} K^2 + 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2} \right]. \quad (32)$$

令 $r = R_c$ 可得塑性半径与外压和轴压的关系为

$$R_c = R_0 \sqrt{\frac{1}{3\alpha \left(\sigma_c - \frac{P}{A} \right) \frac{1-K^2}{p_0} + 3 - 3\alpha}}. \quad (33)$$

将式(28)代入式(10)可得塑性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_0}{1-K^2} \left(\frac{R_0^2}{r^2} - 1 \right), \\ \sigma_\theta = -\frac{p_0}{1-K^2} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z = \left(\frac{1}{3\alpha} \frac{R_0^2}{r^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2} - \sigma_c. \end{cases} \quad (34)$$

同理可得弹性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2} + \frac{R_c^2}{1-K_c^2} \frac{p_0 - p_c}{r^2}, \\ \sigma_\theta = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2} - \frac{R_c^2}{1-K_c^2} \frac{p_0 - p_c}{r^2}, \\ \sigma_z = \left(\frac{1}{3\alpha} \frac{R_0^2}{R_c^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{p_0}{1-K^2} - \sigma_c. \end{cases} \quad (35)$$

4.3 在 $(\sigma_\theta)_{\min} \leq \sigma_z \leq (\sigma_\theta)_{\max}$ 的情况下求圆筒弹塑性应力解及其极限载荷

因为 σ_θ 沿半径方向是随着 r 的增大而逐渐增大的, 当 $R_0 \leq r \leq r_0$ (r_0 为判定 σ_θ 和 σ_z 大小的圆筒半径值) 时, 三维应力之间关系为 $\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$; 当 $r_0 < r \leq R_1$ 时, 则为 $\sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$ 。

当 $R_0 \leq r \leq r_0$ 时, 在 $\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$ 的情况下, 只有 $\sigma_z \leq (\sigma_r + \alpha \sigma_\theta) / (1 + \alpha)$ 成立, 而 $\sigma_z > (\sigma_r + \alpha \sigma_\theta) / (1 + \alpha)$ 不成立。从而按以上同样的方法, 可求得

$$\sigma_z' = \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) \frac{R_0^2}{r^2} + 3 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} - 3\sigma_c; \quad (36)$$

$$\sigma_c \leq \frac{7p_0}{3(1-K^2)}; \quad (37)$$

$$P = A \left\{ 3\sigma_c - \left[\left(\frac{3}{\alpha} + 2 \right) \frac{R_0^2}{r^2} + 3 - \frac{3}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} \right\}; \quad (38)$$

$$r_0 = \frac{R_0}{\sqrt{\left[\frac{\sigma_c(1-K^2)}{p_0} + \frac{1}{\alpha} - 1 \right] \frac{\alpha}{1+\alpha}}} \quad (39)$$

其弹塑性应力解同本文 4.1 节解, 所不同的是 $R_0 \leq r \leq r_0$, σ_c 满足式(37)。

当 $r \geq r_0$ 时, 在 $\sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$ 的情况下, 只有 $\sigma_\theta \leq (\sigma_r + \alpha\sigma_z)/(1+\alpha)$ 成立而 $\sigma_\theta > (\sigma_r + \alpha\sigma_z)/(1+\alpha)$ 不成立。从而按以上同样的方法, 当 $r_0 \leq r \leq R_1$ 时, 可得:

$$\sigma_z' = \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} - \frac{3}{2} \sigma_c; \quad (40)$$

$$\sigma_c \geq \left[\left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) K^2 + \frac{5}{3} - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2}; \quad (41)$$

$$P = A \left\{ \frac{3}{2} \sigma_c - \left[\left(\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\alpha} \right] \frac{p_0}{1-K^2} \right\} \quad (42)$$

其弹塑性应力解同本文 4.2.1 节的解, 所不同的是 $r_0 \leq r \leq R_1$, σ_c 满足式(41)。

5 厚壁圆筒仅在外压 p_0 作用下厚壁圆筒弹塑性解

由于假定岩土材料不可压缩 $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$, 所以仅在外压作用下只有 $\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$, 此时只有 $\sigma_z \leq (\sigma_r + \alpha\sigma_\theta)/(1+\alpha)$ 成立而 $\sigma_z > (\sigma_r + \alpha\sigma_\theta)/(1+\alpha)$ 不成立。现令 $\sigma_1 = \sigma_r$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_\theta$, 并将其代入式(3)可得

$$\frac{6-6\alpha}{5\alpha} \sigma_r - \frac{6}{5} \sigma_c = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (43)$$

将式(43)代入平衡方程, 则

$$\sigma_\theta - \sigma_r = r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (44)$$

可得

$$\frac{d\sigma_r}{\frac{6-6\alpha}{5\alpha} \sigma_r - \frac{6}{5} \sigma_c} = \frac{dr}{r} \quad (45)$$

对式(45)积分得

$$\sigma_r = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sigma_c + C r^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}} \quad (46)$$

将边界条件 $r = R_0$ 时, $\sigma_r = 0$ 代入式(46)可得

$$C = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\sigma_c}{R_0^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}}} \quad (47)$$

将式(47)代入式(46), 并考虑式(6)、式(43)可得塑性区应力为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sigma_c \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}} \right], \\ \sigma_\theta = \frac{6-\alpha}{5(1-\alpha)} \sigma_c \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}} \right] - \frac{6}{5} \sigma_c, \\ \sigma_z = \frac{3+2\alpha}{5(1-\alpha)} \sigma_c \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}} \right] - \frac{3}{5} \sigma_c. \end{cases} \quad (48)$$

利用弹塑性交界面边界条件 $\sigma_r^p = \sigma_r^e = -p_c$, 可得弹塑性交界面上压力为

$$p_c = -\sigma_{r=R_c} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sigma_c \left[\left(\frac{R_c}{R_0} \right)^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}} - 1 \right] \quad (49)$$

当 $R_c \leq r \leq R_1$ 时, 圆筒受内压 p_c 和外压 p_0 , 故弹性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2} + \frac{R_c^2}{1-K_c^2} \frac{p_0 - p_c}{r^2}, \\ \sigma_\theta = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2} - \frac{R_c^2}{1-K_c^2} \frac{p_0 - p_c}{r^2}, \\ \sigma_z = \frac{K_c^2 p_c - p_0}{1-K_c^2}. \end{cases} \quad (50)$$

因弹性区内壁处于屈服状态, 令式(50)中 $r = R_c$ 并代入式(3)可得塑性区半径与外压的关系为

$$p_0 = \frac{3}{5} \sigma_c \left\{ \left[\frac{3+2\alpha}{3(1-\alpha)} - \frac{R_c^2}{R_1^2} \right] \left(\frac{R_c}{R_0} \right)^{\frac{6-6\alpha}{5\alpha}} - \frac{5\alpha}{3(1-\alpha)} \right\} \quad (51)$$

圆筒开始屈服产生于圆筒 $r = R_0$ 处, 当 $R_c = R_0$ 时, 式(51)取得最小值, 此为基于加权双剪强度理论的厚壁圆筒弹性极限围压, 即

$$p_{R_0} = \frac{3}{5} \sigma_c (1-K^2) \quad (52)$$

当 $R_c = R_1$ 时, 式(51)取得最大值, 此为基于加权双剪强度理论的厚壁圆筒塑性极限围压, 即

$$p_{R_1} = \frac{\sigma_c \alpha}{1-\alpha} \left(K^{\frac{6\alpha-6}{5\alpha}} - 1 \right) \quad (53)$$

6 分析与讨论

以上理论推导均是基于材料的均质性和各向同性假设, 金属类材料各向同性程度高, 岩土类材料均质性差, 各向异性特征更为明显。因此, 在外压作用下立井井壁模型破坏形式并非理想的由内到外逐层破坏^[14], 而是会出现如图 1 所示的剪切破坏和压剪破坏。

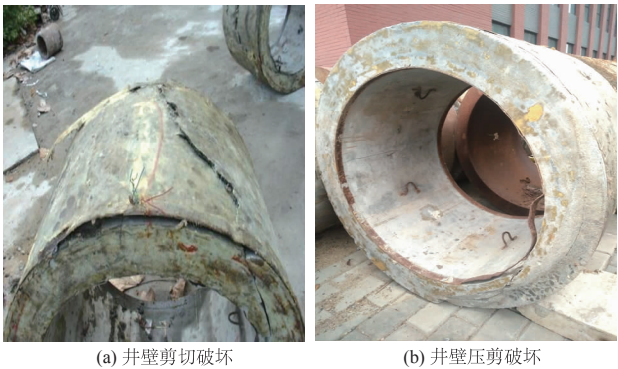


图 1 井壁模型试验破坏形式
Fig.1 Damage patterns of shaft lining in model test

以上推导得到的极限承载力理论值和试验值存在差异,所以引入修正系数 m (试验值与理论值之比)对极限承载力公式进行修正,修正后的极限承载力公式变为

$$P' = m \frac{\sigma_c \alpha}{1 - \alpha} \left(K^{\frac{6\alpha-6}{5\alpha}} - 1 \right) \quad (54)$$

文献[15]—文献[17]描述了立井井壁极限承载力模型试验,为了保证模型试验和理论模型具有相同的初始条件和边界条件,模型试验是在经过煤炭部门认定的高压加载装置中进行的,模型试件是在专门加工的模具中浇筑完成的,试件在养护一段时间后需要经过精密车床加工,保证端面的光滑度,使井壁能够发生径向变形。模型加载过程中,利用高压油泵对井壁模型施加围压来模拟井壁受到的外压作用,其竖向变形通过高强螺栓和盖板加以约束,所以试验全过程中模型基本处于平面应变状态。现从文献[15]—文献[17]中选取井壁强度全为 C70、厚径比不同的 5 组井壁模型极限承载力结果列于表 1。根据文献[18]中关于高性能混凝土拉压比试验的结果,对于 C70 混凝土, $1/\alpha = 12.8$ 。将表 1 中相关参数代入式(53)即可得到井壁极限承载力的理论值,同时可求得相应修正系数 m 。

表 1 井壁极限承载力试验值与理论值

Table 1 Experimental and theoretical values of ultimate bearing capacity of shaft lining

组号	井壁厚度/mm	模型内半径/mm	厚径比	内外径比值 K	试验值/MPa	理论值/MPa	修正系数 m
1	118.0	344.5	0.342 5	0.744 9	25.5	382.91	0.067 0
2	99.8	362.7	0.275 2	0.784 2	23.2	179.61	0.129 2
3	97.5	365.0	0.267 1	0.789 2	22.0	164.69	0.133 6
4	82.0	380.5	0.215 5	0.822 7	19.1	88.68	0.215 4
5	77.5	385.0	0.201 3	0.832 4	18.0	78.17	0.230 3

将表 1 中井壁结构的试验值与理论值绘于图 2,可以看出随着井壁内外半径比值 K 增大,理论

值与试验值均呈减小趋势,说明理论推导的合理性。试验值与理论值差值较大,主要是由于井壁破坏形式宏观上表现为剪切和压剪破坏,而非理论上的由内到外逐层压坏。修正系数不断增大,是由于井壁厚径比不断减小,在围压作用下厚径比大的混凝土井壁各向异性程度低,厚径比小的混凝土井壁各向异性程度高。

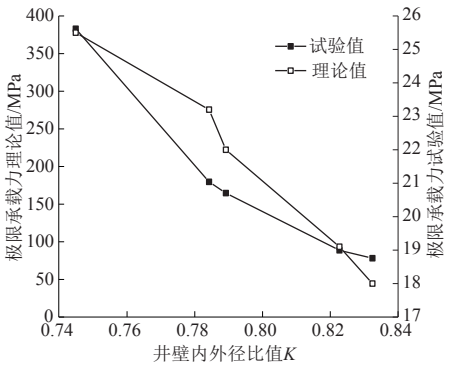


图 2 井壁极限承载力试验值与理论值比较
Fig.2 Comparison of ultimate bearing capacity of shaft lining between experimental and theoretical values

根据表 1 中的井壁内外径比值 K 和修正系数 m 作出修正系数曲线,并对曲线进行拟合,拟合情况如图 3 所示,拟合系数 $R^2 = 0.993 4$ 表明拟合程度很好。

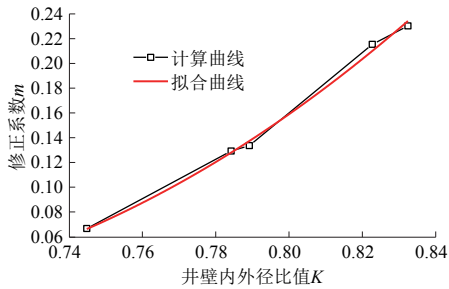


图 3 修正系数拟合曲线
Fig.3 Fitted curve of correction coefficient

拟合方程为

$$m = 6.629\,06e^K - 12.674\,77K - 4.454\,65 \quad (55)$$

将式(55)代入式(54)便可得到修正后的强度为 C70 井壁极限承载力为

$$P' = (6.629\,09e^K - 12.674\,77K - 4.454\,65) \cdot$$

$$\left[\frac{\sigma_c \alpha}{1 - \alpha} \left(K^{\frac{6\alpha-6}{5\alpha}} - 1 \right) \right] \quad (56)$$

为了验证式(56)的正确性,现取文献[19]中的 3 组 C70 井壁模型加载数据列于表 2,将表 2 中相关数据代入式(56)得到的修正井壁极限承载力理论值也列于表 2。

表 2 试验值与修正后理论值对比
Table 2 Experimental values and corrected theoretical values

井壁厚 度/mm	模型内 半径/mm	厚径比	内外径 比值 K	试验值/ MPa	理论值/ MPa	误差/ %
99.8	362.7	0.275 2	0.784 2	23.0	23.52	-2.21
82.0	380.5	0.215 5	0.822 7	19.5	19.07	2.25
97.5	365.0	0.267 1	0.789 2	22.0	22.59	-2.61

由表 2 中试验值与修正后的理论值对比可知,其误差在 $\pm 3\%$ 左右,误差较小,由此验证了式(56)的正确性,且式(56)参数少、计算方便,因此式(56)的计算结果对 C70 井壁模型试验结果具有指导意义。

7 结 论

(1) 基于加权双剪强度理论,考虑不同中间主应力效应,推导了厚壁圆筒在外压 p_0 和轴压 P 共同作用下的弹塑性轴压极限承载力公式。从轴压极限承载力公式可以看出:其大小与外压 p_0 和材料的极限压缩强度 σ_c 有关, σ_c 越大, p_0 越小,圆筒的轴向极限承载力越大。

(2) 基于加权双剪强度理论与应力平衡方程,并考虑了材料的不可压缩,推导了 σ_z 为中间主应力时,厚壁圆筒在外压 p_0 作用下的弹塑性极限承载力公式。从极限承载力公式中可以得到:圆筒的弹塑性极限承载力大小与 σ_c 成正比,与内外径比 K 成反比,所以,工程应用中井筒安全厚度要依据工程实际进行设置。

(3) 修正后的强度等级为 C70 的井壁结构极限承载力理论值与试验值误差在 $\pm 3\%$ 左右,验证了修正公式的合理性。对于其他强度等级的混凝土井壁只要有确定的拉压比 α 和相关试验数据,依照本文中方法也可得到其修正极限承载力公式。

参考文献:

- [1] 彭世龙,荣传新,程 桦.基于广义开尔文模型的冻结壁和井壁共同作用下冻结压力解析解[J].长江科学院院报,2017,34(11):84-88,95.
- [2] 刘金龙,陈陆望,王吉利.立井井壁竖向附加力的反演统计分析[J].中国矿业,2014,23(5):142-146.
- [3] HEITZER M. Plastic Limit Load of Defective Pipes under Combined Internal Pressure and Axial Tension[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44(6): 1219-1224.

- [4] STOKEY W F, PETERSON D B, WUNDER R A. Limit Load for Tubes under Internal Pressure Bending Moment, Axial Force and Torsion[J]. Nuclear Engineering and Design, 1966, 4(2): 193-201.
- [5] 郑津洋.过程设备设计[M].北京:化学工业出版社,2001:52-54.
- [6] 朱国民,蔡钢思,高增梁,等.厚壁圆筒在内压和轴向力复合载荷作用下的极限载荷[J].压力容器,2008,25(7):1-5.
- [7] 余同希.塑性力学[M].北京:高等教育出版社,1989:151-163.
- [8] 侯公羽,牛晓松.基于 Levy-Mises 本构关系及 D-P 屈服准则的轴对称圆筒理想弹塑性解[J].岩土力学,2009,30(6):1555-1562.
- [9] 冯剑军,张俊彦,张 平,等.基于双剪统一强度理论的厚壁圆筒塑性极限载荷分析[J].固体力学学报,2004,25(2):208-212.
- [10] 李雪梅,荣传新,程 桦.基于三参数强度准则的煤矿立井井壁流固耦合理论分析[J].长江科学院院报,2016,33(6):83-87,93.
- [11] 俞茂宏.岩土类材料的统一强度理论及其应用[J].岩土工程学报,1994,16(2):1-10.
- [12] 俞茂宏.对“统一强度理论”讨论的答复[J].岩土工程学报,1996,18(5):97-99.
- [13] 朱 倩,赵均海,张常光,等.双层组合厚壁圆筒弹脆塑性极限内压统一解[J].工程力学,2015,32(9):68-75.
- [14] 吕显州,王渭明,贾海宾,等.弱胶结地层立井井筒变形监测研究[J].长江科学院院报,2018,35(3):122-128.
- [15] 姚直书,薛维培,宋海清,等.富水松软岩层冻结法凿井井壁结构试验研究[J].广西大学学报(自然科学版),2014,39(2):231-236.
- [16] 薛维培,姚直书,荣传新,等.横向均布荷载下煤矿井壁结构模型试验研究[J].中国安全科学学报,2015,25(10):139-145.
- [17] 姚直书,程 桦,杨俊杰.深表土中高强钢筋混凝土井壁力学性能的试验研究[J].煤炭学报,2004,29(2):167-171.
- [18] 尹 健,周士琼.高性能混凝土轴心抗拉强度与劈裂抗拉强度试验研究[J].长沙铁道学院学报,2001,19(2):25-29.
- [19] 李雪梅,荣传新,程 桦.基于三参数强度准则的高强混凝土井壁力学特性分析[J].广西大学学报(自然科学版),2016,41(2):308-316.

(编辑:姜小兰)