文章编号:1001-5485(2009)04-0018-04

论梯形明渠临界水深的精确计算公式

赵延风[1],祝晗英[2],宋松柏[1],孟秦倩[1]
(1.西北农林科技大学 水利与建筑工程学院,陕西 杨凌 712100; 2.西安市水务局 渭浐河城市段管理中心,西安 710015)

摘要:梯形明渠临界水深的求解过程是求解一个单变量超越方程的过程,理论上无解析解。通过引入无量纲参数——单位水面宽度,对梯形明渠临界水深的基本公式进行恒等变形,得到计算梯形明渠临界水深的迭代公式,再与合理的迭代初值配合使用。推导出4套梯形断面临界水深的直接计算公式,其中2套计算公式印证了前人的成果,并为前人的公式推导提供了简捷、充分的理论依据。通过对多家公式形式的表述和比较,并根据精度1%和1‰的不同要求进行误差分析,结果表明:4套直接计算公式理论性强,形式简单,适用范围广,计算精度高,值得推广。

关 键 词:梯形明渠;临界水深;精确计算;单位水面宽度
中图分类号:TV131.4 **文献标识码**:A

有关临界水深的研究历史已有半个多世纪,国内外学者在临界水深方面发表的学术论文超过百篇,提出的各种计算方法在水利水电、灌溉排水等工程中得到一定程度的应用,其中有的计算方法[1~9]不仅公式形式简单,而且计算精度高,得到了学术界以及工程应用部门的充分肯定。临界水深是明渠渠道水力计算中的一个重要水力参数,对于该参数的求解,实质上是求解一个单变量的超越方程或高次方程,理论上无解析解,常规的方法就是试算法、图解法、迭代法、近似解法。本文在前期研究工作的基础上推荐了4种简捷、通用、精度高的直接计算公式。在文中,通过引入无量纲参数——单位水面宽度[3],将梯形明渠临界水深的基本方程变换成迭代的形式,再与合理初值配合使用,得到了临界水深的直接计算公式。并从公式推导的理论依据、表达的简捷程度、计算结果的准确性、梯形断面的适用范围4个方面,对现有的多种计算方法进行综合评价,提出了梯形明渠临界水深具有理论性强、公式简捷、结果准确和适用范围广4个方面于一体的计算公式,可供水利水电等工程设计部门参考应用。

1 无量纲参数——单位水面宽度概念及临界水深的迭代公式

1.1 无量纲参数——单位水面宽度[3]的概念

在文献[3]中已述及,无量纲参数——“单位水面宽度”的概念,即相应于临界水深时的水面宽度与梯形渠道底宽的比值,用 λ 表示,其取值范围为 $1<\lambda<+\infty$。其物理含义是:描述梯形断面过流时过水面的“相对形状”的一个系数,当 λ 趋近1时,梯形过水面趋向一个矩形断面,当 λ 趋向 $+\infty$ 时,梯形过水面趋向一个三角形面。由于梯形断面“单位水面宽度”真实表征的是一个梯形面的相对形状系数,所以它就能够反映梯形过水面的“相对形状”。当梯形断面的底宽和边坡确定后,梯形过水面的大小就随着流量的大小而发生变化,当流量增大时过水面面积、水面宽度、水深随之增大,当流量减小时三者随之减小。当梯形渠道断面和流量都确定时,梯形过水面的“相对形状”就随之确定,也就是“相对形状系数”随之确定,因而水深也随之确定,故引入梯形断面“单位水面宽度”能够更好地反映这些物理量之间的变化规律。

1.2 临界水深的迭代公式

临界水深的基本公式[10]为

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A^3}{B} 。\tag{1}$$

设单位水面宽度

$$\lambda = \frac{B}{b} = 1 + \frac{2m}{b}h_k ,\tag{2}$$

则

$$h_k = \frac{b}{2m}(\lambda - 1) ;\tag{3}$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{[(b + mh_k)h_k]^3}{b + 2mh_k} 。\tag{4}$$

收稿日期:2008-06-04; **修回日期**:2008-08-04
基金项目:国家自然科学基金资助项目(50579065);西北农林科技大学优秀科技人才基金(04ZR014)
作者简介:赵延风(1963-),男,陕西西安人,高级实验师,主要从事水资源、水力学研究,(电话)13572071808(电子信箱)zhyf2009@yahoo.cn。

上面各式中：α 为动能修正系数；Q 为流量(m^3/s)；g 为重力加速度(m/s^2)；b 为梯形渠道底宽(m)；m 为梯形断面的边坡系数，非等腰梯形断面时 $m=(m_1+m_2)/2$；A 为相应于临界水深时的过水断面面积(m^2)；B 为相应于临界水深时的水面宽度(m)；λ 为单位水面宽度；h_k 为临界水深(m)。

将式(3)代入式(4)并整理得

$$\frac{\lambda^2-1}{\lambda^{1/3}}=k\ , \tag{5}$$

其中

$$k=\frac{4m}{b}\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}\ , \tag{6}$$

则得迭代方程

$$\lambda=\sqrt{k\lambda^{1/3}+1}\ 。 \tag{7}$$

由文献[3]可知，迭代式(7)对于 $\lambda\in(1,+\infty)$ 范围内的任意正数均收敛。

2　合理迭代初值及临界水深的直接计算

对于迭代计算，其收敛速度不仅与迭代函数有关，而且与迭代初值密切相关。合理的迭代初值是迭代计算快速收敛的关键。因为 λ 的取值范围为 $\lambda\in(1,+\infty)$，因此将 λ 值取值范围的两个端点分别代入，即 $\lambda=1$ 和 $\lambda=+\infty$，可得到不同的迭代公式。

2.1　当初值取 $\lambda=1$ 时的迭代公式

由式(5)可得

$$\lambda=(\lambda^{-1/3}+k)^{0.6}; \tag{8}$$

将 $\lambda=1$ 代入式(8)得

$$\lambda_0=(1+k)^{0.6}; \tag{9}$$

将式(9)代入式(7)得迭代方程

$$\lambda=\sqrt{1+k(1+k)^{0.2}}\ ; \tag{10}$$

将式(9)再次代入式(8)得

$$\lambda_0=[k+(1+k)^{-0.2}]^{0.6}; \tag{11}$$

将式(11)代入式(7)得迭代方程

$$\lambda=\sqrt{1+k[k+(1+k)^{-0.2}]^{0.2}}\ 。 \tag{12}$$

2.2　当取 $\lambda=+\infty$ 时的迭代公式

当 $\lambda=+\infty$ 时，由式(8)可得 $\lambda_0=k^{0.6}$，将 $\lambda_0=k^{0.6}$ 代入式(7)得 $\lambda_1=\sqrt{1+k^{1.2}}$，将 λ_1 再次代入迭代方程式(7)得

$$\lambda=\sqrt{1+k(1+k^{1.2})^{1/6}}\ ; \tag{13}$$

将(13)代入式(7)整理得

$$\lambda=\sqrt{1+k[1+k(1+k^{1.2})^{1/6}]^{1/6}}\ 。 \tag{14}$$

将式(10)、(12)、(13)、(14)分别代入式(3)，得到 4 套计算梯形明渠临界水深的直接计算公式。

3　梯形明渠临界水深的精确计算公式

对于梯形断面的临界水深，众多的学者通过对公式(4)的各种变换处理，得到了数十种不同的计算方法，其中有的公式不仅形式简捷、计算精度较高，而且适用范围广，堪称求解梯形明渠临界水深最好的计算公式。

为了和现有的计算公式比较，设 k 为综合已知参数，意义同式(6)，x 为无量纲水深，即

$$x=\frac{mh_k}{b}\ ; \tag{15}$$

将式(3)代入式(15)得

$$x=\frac{1}{2}(\lambda-1)\ 。 \tag{16}$$

将式(10)、(12)、(13)、(14)分别代入式(16)得

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{1+k(1+k)^{0.2}}-1)\ ; \tag{17}$$

$$x=\frac{1}{2}\{\sqrt{1+k[k+(1+k)^{-0.2})]^{0.2}}-1\}\ ; \tag{18}$$

$$x=\frac{1}{2}[\sqrt{1+k(1+k^{1.2})^{1/6}}-1]\ ; \tag{19}$$

$$x=\frac{1}{2}\{\sqrt{1+k[1+k(1+k^{1.2})^{1/6}]^{1/6}}-1\}\ 。 \tag{20}$$

将式(17)、(18)、(19)、(20)代入式(15)中即可求出临界水深。公式(17)即为王正中公式[2]；公式(18)即为刘善综公式[1]；公式(19)、(20)为文献[3]的变形公式，即本文公式，其参数 k 与文献[3]公式中的参数 k 意义不同，因而公式表达形式有所不同。

4　几种直接计算方法的理论依据及其公式表述

目前计算梯形明渠临界水深的计算方法很多，但最为典型的有 8 种计算方法，为了使各种计算公式便于比较，采用相同参数无量纲临界水深 x 和综合已知参数 k，其符号意义同上。

几种典型的计算公式表述如下。

(1) 刘善综公式[1]，根据迭代理论，得到梯形明渠临界水深的直接计算公式，即上述的公式(18)。

(2) 王正中公式[2]，根据迭代理论，得到梯形明渠临界水深的直接计算公式，即上述公式(17)。

(3) 廖云凤公式[4]，通过作图发现 $\ln(x/k)$ 与

$\beta\ln(1+k)$之间存在很好的线性关系，得到直线方程 $\ln(x/k)=\beta\ln(1+k)$，采用最小二乘法求得 $\beta=-0.372$，得到梯形明渠临界水深经验公式：

$$x=\frac{k}{4}(1+\frac{k}{4})^{-0.372}。\tag{21}$$

（4）Prabhata K. Swamee 公式[5]，根据最优逼近原理得到的近似计算公式：

$$x=\left\{\left(\frac{k}{4}\right)^{-2.1}+\left[2\cdot\left(\frac{k}{4}\right)^{3}\right]^{-0.42}\right\}^{-0.476}。\tag{22}$$

（5）S. Wu, C. Katopodis 公式[5]，通过作图发现 x 是 k 的通过坐标原点的单调递增函数，经过反复试算得到了一个由 2 个基本单调函数合成的近似解公式：

$$x=0.547\,3k^{0.59}-0.11\mathrm{arsh}(9.077\,5k)\ ;\tag{23}$$

公式(23)的确切表达式应该是

$$x=0.547\,3k^{0.59}-0.11\times\ln[9.077\,5k+\sqrt{(9.077\,5k)^2+1}\,]\ 。\tag{23 a}$$

（6）Prabhata K. S, Pushpa N. R 公式[6]，根据拉格朗日倒置定理推出梯形明渠临界水深的近似解法，是一个分段函数。

当 $k\leqslant1.569\,15$ 时，

$$x=\frac{k}{4}-(\frac{k}{6.928\,21})^2+(\frac{k}{4.406\,46})^4-(\frac{k}{3.446\,09})^5+(\frac{k}{3.094\,29})^6-(\frac{k}{2.965\,88})^7+(\frac{k}{3.010\,03})^8-(\frac{k}{2.734\,20})^{10}+(\frac{k}{2.505\,88})^{11};$$

当 $k\geqslant1.569\,15$ 时，

$$x=1/[(\frac{3.174\,80}{k})^{0.6}+(\frac{1.781\,79}{k})^{1.2}+(\frac{0.883\,41}{k})^{1.8}-(\frac{0.682\,63}{k})^{2.4}-(\frac{0.736\,86}{k})^{3}+(\frac{0.728\,66}{k})^{3.6}+(\frac{0.779\,88}{k})^{4.2}-(\frac{0.796\,76}{k})^{4.8}-(\frac{0.836\,31}{k})^{5.4}]\ 。\tag{24}$$

（7）本文公式，通过引入无量纲参数——单位水面宽度，即梯形水面宽度与梯形底宽的比值，根据迭代理论，得到梯形明渠临界水深的 2 套直接计算公式，即上述的公式(19)、(20)。

通过以上公式的表达形式可以看出，公式的简捷程度从高到低依次为廖云凤公式(21)、王正中公式(17)、本文公式(19)、刘善综公式(18)、本文公式(20)、Prabhata K. Swamee 公式(22)、S. Wu, C. Katopodis 公式(23a)、Prabhata K. S, Pushpa N. R 公式(24)。

5 8 套公式的误差分析

给出无量纲水深计算范围 $x\in(0.001,100)$，其对应的综合参数的范围为 $k\in(0.004,6\,896.83)$，在此范围内，计算以上 8 套公式的误差，计算结果见表 1。

为了直观起见，将 8 套计算公式在整个取值范围内($0<x<+\infty$)的最大相对误差列于表 2。

表 1 临界水深误差分析

Table 1 Error analysis of critical depth

x	k	王正中公式(17)	刘善综公式(18)	本文公式(19)	本文公式(20)	廖云凤公式(21)	P K.S 公式(22)	S.u-C.Ka 公式(23a)	P K.S－P N.R 公式(24)		
									9 项	6 项	3 项
0.001	0.004	0.013	−0.003	−0.044	0.000	−0.004	0.203	1 606.874	0.000	0.000	0.000
0.010	0.040	0.126	−0.024	−0.309	−0.002	−0.039	−0.220	328.541	0.000	0.000	0.000
0.100	0.371	0.784	−0.108	−1.014	−0.052	−0.240	−1.464	1.517	0.000	0.000	0.020
0.125	0.522	0.872	−0.111	−1.028	−0.062	−0.261	−1.599	−0.472	0.000	−0.001	0.049
0.200	0.858	1.012	−0.103	−0.958	−0.078	−0.272	−1.787	−1.221	0.001	−0.020	0.317
0.268	1.178	1.047	−0.088	−0.851	−0.082	−0.242	−1.787	−0.852	0.043	−0.173	1.015
0.283	1.248	1.048	−0.085	−0.827	−0.082	−0.233	−1.774	−0.777	0.079	−0.257	1.253
0.300	1.334	1.047	−0.081	−0.799	−0.081	−0.221	−1.753	−0.694	0.160	−0.404	1.593
0.347	1.569	1.035	−0.071	−0.726	−0.079	−0.187	−1.676	−0.513	0.902	−1.224	2.858
0.347	1.569	1.035	−0.071	−0.726	−0.079	−0.187	−1.676	−0.513	1.020	0.350	−5.448
0.400	1.841	1.010	−0.062	−0.652	−0.075	−0.146	−1.562	−0.377	0.462	0.264	−4.375
0.500	2.381	0.948	−0.047	−0.534	−0.067	−0.073	−1.300	−0.252	0.128	0.152	−3.025
1	5.547	0.641	−0.014	−0.232	−0.034	0.072	0.078	−0.347	0.002	0.016	−0.800
2	14.035	0.337	−0.003	−0.078	−0.013	−0.263	1.630	−0.439	0.000	0.001	−0.164
3	25.092	0.211	−0.001	−0.038	−0.006	−0.639	2.174	−0.312	0.000	0.000	−0.059
4	38.460	0.147	0.000	−0.023	−0.004	−0.878	2.326	−0.161	0.000	0.000	−0.028
4.500	45.952	0.126	0.000	−0.018	−0.003	−0.952	2.336	−0.091	0.000	0.000	−0.020
5	53.957	0.110	0.000	−0.015	−0.002	−1.002	2.323	−0.028	0.000	0.000	−0.015
10	159.482	0.042	0.000	−0.004	−0.001	−0.832	1.869	0.332	0.000	0.000	−0.002
50	2 190.247	0.004	0.000	0.000	0.000	2.862	0.516	0.034	0.000	0.000	0.000
100	6 896.827	0.001	0.000	0.000	0.000	5.384	0.191	−0.591	0.000	0.000	0.000

表 2　梯形渠道临界水深不同计算方法最大相对误差

Table 2　Maximal relative error of different computational methods on critical depth of a trapezoidal channel　%

公式名称	在工程常用范围内（$0<x\leqslant10$）	在较大范围内（$0<x\leqslant100$）	在 x 的定义域内（$0<x<+\infty$）
刘善综公式(18)	−0.111	−0.111	−0.111
王正中公式(17)	1.048	1.048	1.048
本文公式(19)	−1.028	−1.028	−1.028
本文公式(20)	−0.082	−0.082	−0.082
廖云凤公式(21)	−1.002	5.384	$+\infty$
Prabhata K. Swamee 公式(22)	2.336	2.336	−4.562
S. Wu, C. Katopodis 公式(23a)	1 606.874	1 606.874	1 606.874
Prabhata K. S, Pushpa N. R 公式(24)3 项	−5.448	−5.448	−5.448
Prabhata K. S, Pushpa N. R 公式(24)6 项	−1.224	−1.224	−1.224
PrabhataK. S, Pushpa N. R 公式(24)9 项	1.020	1.020	1.020

从误差分析和表 1、表 2 可知，在无量纲水深 x 的定义域内（$0<x<+\infty$），若以精度 1‰为标准，本文公式(20)最大误差为0.82‰，刘善综公式(18)最大误差为1.11‰；若以精度 1%为标准，Prabhata K. S，Pushpa N. R9 项公式最大误差为1.020%，本文公式(19)最大误差为1.028%，王正中公式最大误差 1.048%，Prabhata K. S，Pushpa N. R6 项公式最大误差1.224%，其他计算公式误差均较大。但若以精度 1%为标准，在工程常用范围（$0<x\leqslant10$）内，廖云凤公式(21)最大误差为−1.002%。

6　结　论

通过公式形式及误差分析可以看出，在无量纲水深 x 的定义域内（$0<x<+\infty$），在保证精度为 1‰的条件下，公式比较简捷且适用范围广的计算公式是刘善综公式(18)和本文公式(20)；在保证精度为 1%的条件下，公式比较简捷且适用范围广的计算公式是王正中公式(17)和本文公式(19)。公式(17)、(19)、(18)、(20)都是根据迭代理论推导出来的，具有很强大理论性，这 4 套公式是值得推荐的公式，他们具有共同的特点，即同时具有理论性强，公式简捷，计算精度高，适用范围广 4 方面于一体的优势，是计算梯形明渠临界水深在不同精度要求下的最佳公式。当然，廖云凤公式(21)在工程常用范围内（$0<x\leqslant10$）且计算精度保证在 1%的条件下也具有公式简捷、精度较高的特点，可供工程设计部门参考应用。

参考文献：

[1] 刘善综. 梯形渠道临界水深的计算及讨论[J]. 水利学报，1995，(6)：83−85.

[2] 王正中，袁　驷，武成烈. 再论梯形明渠临界水深计算法[J]. 水利学报，1999，(4)：14−16.

[3] 赵延风，王正中，张宽地. 梯形明渠临界水深的直接计算方法[J]. 山东大学学报(工学版)，2007，37(6)：99−105.

[4] 廖云凤. 梯形断面渠道临界水深显式计算[J]. 陕西水力发电，2001，17(4)：22−23.

[5] PRABHATA K S，WU S，KATOPODIS C. Formula for Caculating Critical Depth of Trapezioidal Open Channel [J]. J Hydr. Engrg，1999，125(7)：785−786.

[6] SWAMEE P K，RATHIE P N. Exact Equations for Critical Depth in a Trapezoidal Canal[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering，2005，5，474−476.

[7] 郝树棠. 梯形渠道临界水深的计算及探讨[J]. 水利学报，1994，(8)：48−52.

[8] 王正中. 梯形明渠临界水深计算公式探讨[J]. 长江科学院院报，1995，12(2)：78−80.

[9] WANG Zheng-zhong. Formula for Caculating Critical Depth of Trapezioidal open Channel[J]. J Hydr. Engrg，1998，124(1)：90−92.

[10] 清华大学. 水力学(修订本)上册[M]. 北京：高等教育出版社，1980.

（编辑：易兴华）

Discuss on Accurate Calculation Formula of Critical Depth of Open Trapezoidal Channel

ZHAO Yan-feng[1]，ZHU Han-ying[2]，SONG Song-bai[1]，MENG Qin-qian[1]

（1. College of Water Resources and Architectural Engineering，Northwest A&F University，Yangling　712100，China；2. Xi'an Affairs Bureau，Management Center of Weihe River and Chanhe River，Xi'an　710015，China）

Abstract：The solution process of critical depth on trapezoidal channel is to solute a single variable. There is no

（下转第 47 页）