

挟沙水流几个运动特性的探讨^①

陈德明

陈家扬

(河流研究所)

(四川联合大学,成都 610065)

摘 要 引用大气边界层的混掺长度表达式作为挟沙水流近壁区的混掺长度,从挟沙水流总切应力平衡方程导出了近壁区的流速分布公式,通过比较验证后推广到整个水深范围,进而使用该公式导出了挟沙水流主流区以上的混掺长度、动量交换系数和整个水深的垂向紊动强度公式,前两者与水槽资料点绘的结果吻合良好,由后者得到了垂向紊动强度增减的临界条件。

关键词 层结流体 流速 混掺长度 动量交换系数 紊动强度^①

0 前 言

挟沙水流的混掺长度是人们十分关心而又难以具体描述的问题。由 $\frac{dd_m}{dy} = (d - d) \frac{dc}{dy}$ 可知,含沙浓度梯度分布决定了密度梯度分布。将挟沙水流近壁区视为密度层结流,与大气边界层中由温度梯度造成的层结流相比,两者成因虽不同,但密度层结对紊流交换的影响是相似的。由此,可引用大气边界层的混掺长度,从总切应力平衡方程出发,导出挟沙水流近壁区的流速公式。分析表明,清水情形的对数流速公式仅是该公式的特例,钱宁和万兆惠借鉴气象学中不同温度梯度对应下的风速表达式所获得的近壁区的流速公式与该公式在主流区的表达式不仅形式一样,而且系数也基本一致。鉴于对数流速公式适用于整个水深范围,将该公式推广到整个水深,这与钱宁和万兆惠通过水槽资料验证后将其公式推广到整个水深不谋而合。

1 挟沙水流近壁区的流速分布公式

挟沙水流的密度 $d_m = d(1 + \frac{d-d}{d}c)$,对 y 求导

$$\frac{dd_m}{dy} = (d - d) \frac{dc}{dy} \quad (1)$$

由上式可知,挟沙水流在垂线方向存在密度梯度,

此密度梯度由含沙浓度梯度造成。我们将挟沙水流近壁区视为层结流体,Laixtman 曾假定大气边界层中温度梯度造成的层结流体的混掺长度为^[1]

$$l_m = By^{1-X} \quad (2)$$

式中 B 与层结、糙率等因素有关, X 反映了密度层结的影响。我们将上式作为挟沙水流近壁区的混掺长度,清水情形 $X=0$, l_m 退化为 $l = ky$, 此时 B 即为卡门常数 k

挟沙水流的总切应力平衡方程为^②

$$U_*^2 (1 - \frac{y}{H}) = \nu \frac{du}{dy} + (l_m \frac{du}{dy})^2 \quad (3)$$

式中 $\nu = \frac{1 + \frac{2.5c}{d-d}}{1 + \frac{2.5c}{d}} \nu_0$, ν_0 为清水情形的运动粘性系数

将 (2) 式代入 (3) 式,并将 (3) 式视为 $\frac{du}{dy}$ 的一元二次代数方程,近壁区 $1 - \frac{y}{H} \approx 1$, 求解代数方程的根

$$\frac{du}{dy} = \frac{\nu}{2(By^{1-X})^2} [-1 \pm \sqrt{1 + (\frac{2By^{1-X}U_*}{\nu})^2}] \quad (4)$$

在稳定水流中, $\frac{du}{dy} > 0$, 故上式取正,并设

$$\frac{\nu}{2By_0^{1-X}U_*} = 1 \quad (5)$$

由上式可得 $y_0 = (\frac{\nu}{2BU_*})^{\frac{1}{1-X}}$, 清水时 $y_0 = \frac{\nu_0}{2kU_*}$, 与 Von Karman, Th. 推导对数分布公式时的零边界

① 收稿日期: 1995-02-05

② 本文得到国家自然科学基金的资助(编号: 59279384)

③ 陈德明, 推移质和悬移质转换层的输沙规律研究, 四川联合大学(成都科技大学)硕士学位论文, 1995

条件 $y_0 = K_s / 30.2$ 及 G. H. Keulegan 分析 H. Bazin 的水槽资料得出的^① $y_0 = \frac{v_0}{9.05U_*^{1/2}}$ 相近, 故我们将 (5) 式的 y_0 作为零边界条件, 并将 (4) 式的根号按二项式展开, 舍去高阶项小值, 则 (4) 式可化为^②

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{B} y^{X-1} - \frac{\nu}{2B^2} y^{2X-2} \quad (6)$$

用零边界条件积分, 得

$$u = \frac{U_*}{BX} (y^X - y_0^X) + \frac{\nu}{2B^2(1-2X)} (y^{2X-1} - y_0^{2X-1}) \quad (7)$$

化成无量纲式, 得

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{BX} (y^X - y_0^X) + \frac{\nu}{2B^2(1-2X)U_*} (y^{2X-1} - y_0^{2X-1}) \quad (8)$$

由上式可知, 挟沙水流近壁区的流速与浓度梯度、浓度、沿水深所处位置及粘性有关

2 挟沙水流的流速分布公式

2.1 (8) 式与清水情形的对数分布公式比较及推广
在主流区粘性可忽略, 则 (8) 式简化为

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{BX} (y^X - y_0^X) \quad (9)$$

由前面的假设, 清水时 $X=0, B=k$, 则上式相当于求极限

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_*} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{BX} (y^X - y_0^X) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} (y^X \ln y - y_0^X \ln y_0) \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{B} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} \quad (10) \end{aligned}$$

由此可见, 清水情形的对数分布公式仅是 (8) 式的特例。鉴于对数公式适用于对数层以上的整个水深范围, 故我们将 (8) 式推广到整个水深。其正确性下面将进一步说明。

2.2 B 的确定和流速公式的对比验证

挟沙水流流速分布在主流区以上仍服从对数分布规律, 只是卡门常数小于 0.4, 设卡门常数为 k_m , 它与理查逊的平均值 E 有关^[3], 则流速梯度为

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{k_m} \frac{1}{y} \quad (11)$$

(6) 式在主流区以上忽略粘性, 则

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{B} \frac{y^{X-1}}{y} \quad (12)$$

设在 y_* 处挟沙水流开始服从卡门常数为 k_m 的对数分布规律^[3], 则 (11) 和 (12) 式在 y_* 处应相等, 由此解出 B 值, 得

$$B = k_m y_*^X \quad (13)$$

因 y_* 的确定较复杂, 从实用出发, 取为水深 H 。将 B 值代入 (8) 式, 便得挟沙水流的流速公式

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_*} &= \frac{1}{k_m X} \left[\left(\frac{y}{H} \right)^X - \left(\frac{y_0}{H} \right)^X \right] \\ &+ \frac{\nu}{2k_m^2 U_* (1-2X)y} \left[\left(\frac{y}{H} \right)^{2X} - \left(\frac{y_0}{H} \right)^{2X} \right] \quad (14) \end{aligned}$$

在主流区忽略粘性, 则

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{k_m X} \left[\left(\frac{y}{H} \right)^X - \left(\frac{y_0}{H} \right)^X \right] \quad (15)$$

钱宁和万兆惠也曾获得近壁区的流速分布公式^[4]

$$u = b(Z_0^{\frac{1}{m}} - Z_0^{\frac{1}{m}}) \quad (16)$$

式中 $u = \frac{u}{U_*}$, $Z = \frac{y}{H}$ 。经文献 [3] 的水槽资料验证,

$k_m X$ 与 b, X 与 $\frac{1}{m}$ 基本一致。有意思的是, 钱宁和万兆惠通过水槽资料检验后, 将其公式推广为近壁区及其以上的流速公式^[5], 与本文通过跟清水时的对数分布比较后, 将 (14) 式推广至整个水深不谋而合。相比之下, (14) 式在近壁区时考虑了粘性的影响。

2.3 X 的确定

在某一高度 y_1 处, 由 (9) 式得

$$\frac{u_1}{U_*} = \frac{1}{BX} (y_1^X - y_0^X) \quad (17)$$

(9) 式与上式相比, 可得

$$u = \frac{y^X - y_0^X}{y_1^X - y_0^X} u_1 \quad (18)$$

对上式求导, 得

$$\frac{du}{dy} = \frac{X u_1}{y_1^X - y_0^X} y^{X-1} \quad (19)$$

在稳定水流中, $\frac{du}{dy} > 0$, 由上式可得

$$X > 0 \quad (20)$$

对 (19) 式再求导, 得

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{X(X-1)u_1}{y_1^X - y_0^X} y^{X-2} \quad (21)$$

在稳定水流中, $\frac{d^2 u}{dy^2} < 0$, 由上式得

$$0 < X < 1 \quad (22)$$

由 (20)、(22) 式知, 上式即为挟沙水流流速公式

① ① 陈德明. 推移质和悬移质转换层的输沙规律研究. 四川联合大学 (成都科技大学) 硕士论文, 1995

(14)式中 X 的变化范围, 因 X 与层结有关, 而表达层结的参数为理查逊数 我们点绘了 X 与理查逊数沿水深的平均值 E 的关系, 见图 1

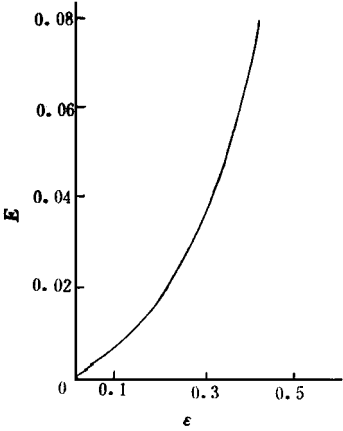


图 1 X 与 E 关系

3 挟沙水流的混掺长度

(3)式在主流区忽略粘性, 得

$$l_m = \frac{U_*}{\frac{du}{dy}} \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tag{23}$$

将 (12) 式代入上式, 得

$$l_m = B y^{1-X} \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tag{24}$$

将 (13) 式的 B 值代入上式, 得

$$l_m = k_m y \left(\frac{y_k}{y} \right)^X \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tag{25}$$

当 $X=0, k_m=k$ 时, 便为清水的混掺长度

$$l = k y \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tag{26}$$

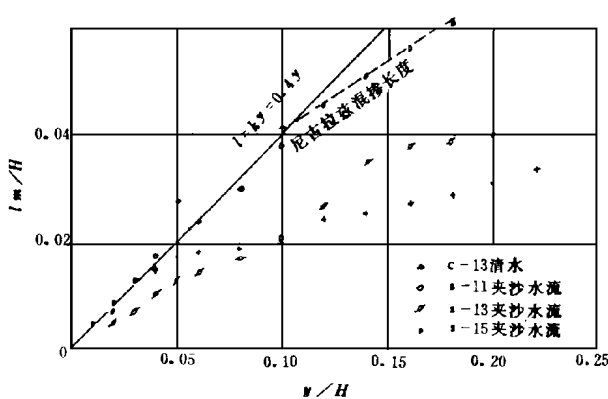


图 2 有关混掺长度的对比

上式与 (25) 式相比, 可得

$$\frac{l_m}{l} = \frac{k_m}{k} \left(\frac{y_k}{y} \right)^X \tag{27}$$

由上式可知, 只有高度很低 ($y < y_k$) 时, 才可能使 l_m 与 l 相等, 随着高度的升高, l_m 较 l 越小。即是说, 泥沙的存在使混掺长度较清水为小。此结论与钱宁和万兆惠点绘的实验成果 (图 2) [4] 吻合良好。

4 挟沙水流的动量交换系数

由混掺长度理论, 动量交换系数为

$$X_m = \frac{f}{d_m \frac{du}{dy}} \tag{28}$$

由 $f = d_m U_*^2 \left(1 - \frac{y}{H} \right)$ 以及 (13) 和 (14) 式, 得

$$X_m = k_m y U_*^2 \left(1 - \frac{y}{H} \right) \left(\frac{y_k}{y} \right)^X \tag{29}$$

当 $X=0, k_m=k$ 时, 便得清水的动量交换系数

$$X_0 = k y U_*^2 \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tag{30}$$

以上两式相比, 得

$$\frac{X_m}{X_0} = \frac{k_m}{k} \left(\frac{y_k}{y} \right)^X \tag{31}$$

与 (27) 式比较可知, 泥沙的存在对动量交换系数的影响与对混掺长度的影响是一致的 (见图 3 [4])。

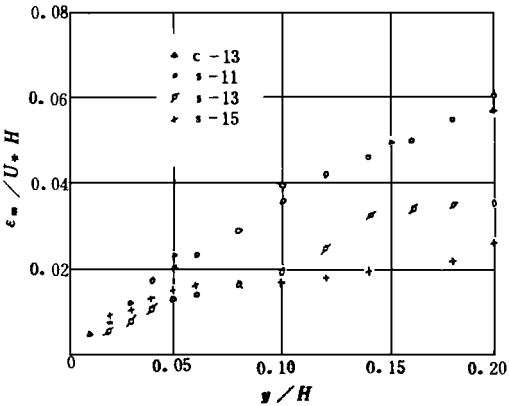


图 3 有关动量交换系数的对比

5 挟沙水流的紊动强度

泥沙的存在究竟是使紊动增强还是减弱, 是否存在紊动增减的临界值, 这个问题一直是河流泥沙工作者所关心的。这里从理论上对此作出定性探讨。由混掺长度理论, 挟沙水流的垂向紊动强度为

$$\overline{V_m^2} = l_m \frac{du}{dy} \tag{32}$$

由 (2)、(6)、(14) 式可得

$$\overline{\overline{V_m^2}} = U_*^2 - \frac{\nu_0}{2y} \frac{1}{k_m} \frac{1 + \frac{2.5c}{d - d}}{1 + \frac{2.5c}{d} \frac{1}{c}} \left(\frac{y}{y_k}\right)^x \quad (33)$$

当 $c = 0, X = 0, k_m = k$ 时, 使得清水的垂向紊动强度

$$\overline{\overline{V^2}} = U_*^2 - \frac{\nu_0}{2ky} \quad (34)$$

可知随高度增加, $\overline{\overline{V^2}}$ 趋于 U_*^2 , 随高度减小,

$\overline{\overline{V^2}}$ 趋于零, 这与实际情况是符合的。

将 (33)、(34) 两式左右两端分别相减, 得

$$\overline{\overline{V_m^2}} - \overline{\overline{V^2}} = \frac{\nu_0}{2y} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k_m} \frac{1 + \frac{2.5c}{d - d}}{1 + \frac{2.5c}{d} \frac{1}{c}} \left(\frac{y}{y_k}\right)^x \right] \quad (35)$$

由上式可知, 紊动强度的增减与浓度层结、浓度、颗粒密度和流体密度等因素有关。设上式为零, 则得临界条件

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_m} \frac{1 + \frac{2.5c}{d - d}}{1 + \frac{2.5c}{d} \frac{1}{c}} \left(\frac{y_c}{y_k}\right)^x \quad (36)$$

由上式可解出 y_c, y_k 以上, 挟沙水流的垂向紊动强度较清水为小, y_c 以下, 较清水情形为大。由文献 [3] 可知, y_k 一般在 $0.1H$ 以下, 则 y_c 更低, 即垂线上相当大的高度范围内, 垂向紊动强度较清水为小, 只有靠近床面的某一高度内才可能增大。

6 结 论

(1) 引入大气边界层混掺长度作为挟沙水流近壁区的混掺长度, 导出了挟沙水流流速公式。

(2) 导出了挟沙水流的混掺长度和动量交换系数。因泥沙的存在使紊动减弱。

(3) 导出挟沙水流的垂向紊动强度公式 (33) 式, 进而得到紊动增减的临界条件 (16) 式。该式表明, 相当大的高度范围内紊动为减小, 只有在靠近床面的某一高度范围才可能出现增大。

参 考 文 献

- 1 杨大升, 刘余滨, 刘式适. 动力气象学. 北京: 气象出版社, 1983 345
- 2 张书农, 华国祥. 河流动力学. 北京: 水利电力出版社, 1985 22
- 3 Einstein H A and Chien Ning (钱宁). Effects of Sediment Concentration near the Bed on the Velocity and Sediment Distribution, M. R. D. Sediment Series No. 8, Missouri River Div, Corps of Engrs, 1955 76
- 4 钱宁, 万兆惠. 近底高含沙量流层对水流及泥沙运动影响的初步探讨. 水利学报, 1965(4): 1~20
- 5 钱宁, 万兆惠. 泥沙运动力学. 北京: 科学出版社, 1983 382~384

An Inquiry into some Kinematic Characteristics of Sediment-laden Flow

Chen Deming

(Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430010)

Chen Jiayang

(Sichuan Union University, Chendu 610065)

Abstract Regarding the expression for mixed length in atmospheric boundary layer as the one in sediment-laden flow, and based on the total shear stress equilibrium equation of this flow, a velocity distribution formula in the near-wall zone is derived. Through comparison and testing verification the formula may be applied to the whole water depth. And then, the formulas for the mixed length, momentum transfer coefficient, turbulence intensity of sediment-laden flow are developed. The agreement between the computed results by using the preceding two formulas and measured data obtained from the experiment is good. From the third formula the critical condition of vertical turbulence intensity is obtained.

Keywords stratified flow; velocity; mixed length; momentum transfer coefficient; turbulence intensity